Journal of Geometry and Physics 13 (1993) 393–414
North-Holland

JOURNAL OF
GEOMETRY AND
PHYSICS

Représentation d'une particule quantique de spin 1/2 par le produit de Moyal et une super-variété symplectique plate

Jean-Bertrand Kammerer

Département de Mathématiques, Ecole Centrale de Paris, 92290 Châtenay-Malabry, Télécom. Paris, 46 rue Barrault, 75013 Paris, France

Michel Valton

Département de Physique-Electronique, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, 75003 Paris, France

Reçu le 13 avril 1993

The aim of this paper is to show that it is possible to represent a quantum particle with a spin with the help of a star product and a flat supermanifold. We extend to the supermanifolds the Schouten bracket, the exterior differentiation, the Lie derivative. These notions allow us to define the Poisson bracket and the symplectic supermanifolds. It is easy to define the Moyal product: the Grassmann algebra of the superfunctions becomes a Clifford algebra. We suppose that the observables of a quantum particle with a spin are superfunctions defined on a flat supermanifold. The study of these star algebras proves the existence of a spectral resolution for some particular elements. Consequently the equation of motion for an observable admits stationary solutions. The examples considered show that the spin splits a given state into two other ones.

Keywords: *symplectic supermanifold, star product, spectral resolution, spin*
1991 MSC: 17 B 65, 58 F 05

1. Introduction et résultats

Le star-produit permet une formulation de la mécanique quantique comme déformation de la mécanique classique [1], en remplaçant l'algèbre usuelle des fonctions numériques et l'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson par une star-algèbre associative et une algèbre de Lie définie par le crochet du star-produit. En effet les auteurs de l'article cité ont établi de manière autonome le spectre de l'oscillateur harmonique et celui de l'atome d'hydrogène. Ce sont des exemples "bosoniques". Pour embrasser le cas des "fermions", il y a lieu d'étendre la quantification par star-produit à l'algèbre de Grassmann des super-fonctions. Le

SSDI 0393-0440(93)E0039-R

schéma est analogue: la super-algèbre de Grassmann définie sur une super-variété symplectique est déformée par introduction du star-produit en une algèbre de Clifford. Les trois quantités S^i égales aux star-produits deux à deux de trois variables impaires ont les mêmes règles de calcul que les observables habituelles des spins. Cette correspondance est exploitée en représentant une particule de spin 1/2 à l'aide d'un espace de phase qui est une super-variété symplectique et d'un hamiltonien comportant ces variables S^i [2].

Cet article se divise en deux parties. D'abord sur une super-variété plate les notions habituelles, crochet de Schouten, dérivation extérieure, produit intérieur, dérivée de Lie permettent de définir les super-variétés symplectiques et d'avoir les équivalences habituelles (paragraphes 2 et 3). Le star-produit de fonctions comportant des variables impaires peut par suite être défini formellement; les règles de calcul entre variables impaires, lorsque la super-variété est plate, s'en déduisent (paragraphe 4). Il s'avère utile de préciser la 2-forme ω qui sert à définir la super-variété symplectique pour introduire des variables S^i, produits deux à deux de variables impaires, qui aient les mêmes règles de calcul que celles des observables S_x, S_y et S_z considérées habituellement. Cette remarque permet de définir la super-variété $\mathbb{R}_S^{2n}$ qui sera utilisée comme espace de phase d'une particule de spin 1/2 (paragraphe 5). Les paragraphes suivants (paragraphes 6 à 8) montrent que les résultats établis précédemment sur les star-ν-algèbres de fonctions ou de distributions complexes s'étendent à de nouvelles star-ν-algèbres de fonctions ou de distributions liées à la super-variété définie précédemment. En particulier la décomposition spectrale des éléments réels des algèbres $\mathscr{B}^\nu$ et $\mathcal{O}_M^\nu$ se généralise; ces algèbres sont suffisamment vastes pour contenir l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique et les moments angulaires par exemple. Cette généralisation permet de préciser le spectre de la somme d'une fonction réelle f de spectre connu et d'une fonction A de variables impaires (paragraphes 9 à 11).

La seconde partie débute par la répresentation d'une particule de spin 1/2 au moyen d'un hamiltonien (somme de l'hamiltonien habituel et d'une fonction des variables S^i) et d'un espace de phase qui est $\mathbb{R}_S^{2n}$; la recherche des états propres de la particule est celle des éléments propres de l'hamiltonien; le niveau d'énergie est la valeur propre associée (paragraphe 12). Après avoir exprimé les résultats habituels sur les moments cinétiques et leurs nombres quantiques avec le produit de Moyal (paragraphe 13), il est facile de montrer la composition des moments cinétiques (paragraphe 14). L'effet d'un champ magnétique sur une particule de spin 1/2 est étudiée en la supposant dans un état propre; cet état se dédouble; il apparaît deux niveaux d'énergie (paragraphe 15). Ensuite le couplage spin–orbite est pris en compte: l'état propre est supposé défini par un élément propre commun à l'hamiltonien, à $\boldsymbol{L}^2$ et à la composante du moment cinétique dans la direction du champ magnétique; cet état est donc caractérisé par le niveau d'énergie et deux nombres quantiques l et m. L'état propre se scinde en quatre états (paragraphe 16). Le dernier paragraphe (paragraphe 17) définit le spin d'un système de plusieurs particules de spin 1/2; les nombres quantiques avec les éléments propres correspondants sont explicités dans le cas d'un système de deux particules ainsi que le couplage de deux particules dû à une interaction entre les spins.

2. Crochet de Schouten, dérivée de Lie d'une super-variété

Soit $(M, \mathscr{A})$ une super-variété: M est une variété différentiable et $\mathscr{A}$ un faisceau de super-algèbres commutatives [3]. Pour tout ouvert U d'un recouvrement de M, il existe un isomorphisme $\tau: \mathscr{A}(U) \to C^\infty(U) \otimes \Lambda V$ [4]. La variété M et l'espace vectoriel V seront supposés de dimension p et q. Dans un ouvert U d'une carte, désignons par $(u^i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les coordonnées locales et par $(\xi^i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une base de V. Le couple (u, ξ) sera désigné par x.

Soit U un ouvert de M; l'espace Vect U *des champs de vecteurs* est l'espace des dérivations de la super-algèbre $\mathscr{A}(U)$ (notée A). Cet ensemble est un A-module libre de dimension (p, q) et une super-algèbre de Lie grâce au crochet de Lie de deux dérivations [5,6].

Le A-module des champs de tenseurs $\Lambda_A(\text{Vect } U)$ est une super-algèbre de Lie graduée grâce au crochet de Schouten; il est obtenu comme prolongement du crochet de Lie du A-module Vect U [7]. Un élément X *bi-homogène* de $\Lambda_A(\text{Vect } U)$ est un élément homogène de $\Lambda_A^r(\text{Vect } U)$; soit $|X|$ sa parité, $p(X)$ l'ordre r. L'application $Y \mapsto [X, Y]$ est une dérivation de la super-algèbre de Lie graduée $\Lambda_A(\text{Vect } U)$ de bi-degré $(|X|, p(X)-1)$ car pour des éléments bi-homogènes X et Y, il vient [8]:

$$[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{|X||Y| + (p(X)-1)p(Y)} Y \wedge [X, Z] . \tag{1}$$

Soit X un champ de tenseurs; *le produit intérieur* $i(X)$ est défini comme application transposée du A-morphisme $S \mapsto S \wedge X$. Lorsque X est un champ de vecteurs, ce A-morphisme est une dérivation de l'algèbre extérieure graduée $\Lambda_A(\text{covect } U)$ construite sur le dual covect(U) du A-module Vect(U). Cette dérivation $i(X)$ est de bi-degré $(|X|, -1)$.

Soit f une fonction homogène de $\mathscr{A}(U)$; appelons *différientielle* de f la 1-forme $\mathrm{d}f: X \mapsto (-1)^{|X| \cdot |f|} X(f)$. Dans une carte locale U, le A-module covect(U) admet la base $(\mathrm{d}x^i)_{1 \leqslant i \leqslant p+q}$ [5]. La *dérivation extérieure* d se prolonge en une dérivation de bi-degré $(0, 1)$ en posant pour une forme différentielle

$$\alpha = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \mathrm{d}x^{i_r} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r}$$

de $\Lambda_A(\text{covect } U)$:

$$\mathrm{d}\alpha = (-1)^r \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \cdots \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r} . \tag{2}$$

Etant donné un champ de vecteurs X, définissons *la dérivée de Lie* comme la composée des dérivations d et $i(X)$. Puisque ces deux dérivations sont de bi-degré (0, 1) et $(|X|, -1)$, la dérivée de Lie est la dérivation de bi-degré $(|X|, 0)$ définie par la relation

$$\mathscr{L}_X = [\mathrm{d}, i(X)] = \mathrm{d} \circ i(X) + i(X) \circ \mathrm{d} . \tag{3}$$

Le crochet de deux dérivées $\mathscr{L}_X$ et $\mathscr{L}_Y$ est égal à $\mathscr{L}_{[X,Y]}$.

3. Super-variété symplectique

Considérons une super-variété munie d'une deux-forme ω. La 2-forme ω est dite non-dégénérée lorsque le bérezinien de la matrice des coordonnées de sa restriction à un ouvert U existe et est différent de 0 [5]. Autrement dit: les deux matrices carrées $(\omega_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et $(\omega_{ij})_{p+1 \leqslant i,j \leqslant p+q}$ respectivement d'ordre p et q sont inversibles. Trois résultats seront utiles [8]:

(i) Pour qu'un forme non-dégénérée ω définie sur une super-variété soit fermée, il faut et il suffit qu'il existe en tout point de la variété M une carte locale U dans laquelle la restriction de ω s'écrive:

$$\omega_U = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i+n} + \sum_{i=1}^{q} \epsilon(i)\, \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^i , \quad \epsilon(i) = \pm 1 . \tag{4}$$

La dimension de la variété M est donc nécessairement paire, $p=2n$.

(ii) Soit ω une forme non-dégénérée définie sur une super-variété; soit μ le A-morphisme bijectif du A-module des champs de vecteurs Vect(U) dans le A-module des 1-formes covect(U) : $X \mapsto i(X)\omega$. Ce A-morphisme μ se prolonge en un A-morphisme de $\Lambda_A(\text{Vect } U)$ dans $\Lambda_A(\text{covect } U)$. L'image inverse de la 2-forme ω est un 2-tenseur Λ. Pour que la 2-forme ω soit fermée, il faut et il suffit que le crochet de Schouten de Λ avec lui-même soit nul: $[\Lambda, \Lambda]=0$.

(iii) Soit Λ un deux-tenseur pair. Considérons la loi de composition définie dans $\mathscr{A}(U)$ par la relation

$$\forall u, v, w \in \mathscr{A}(U) \quad \{u, v\} = i(\Lambda)(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v) .$$

Pour que cette loi de composition vérifie l'identité généralisée de Poisson,

$$\underset{u,v,w}{\mathsf{S}} (-1)^{|u||w|} \{\{u, v\}, w\} = 0 , \tag{5}$$

il faut et il suffit que le crochet de Schouten de Λ avec lui-même soit nul: $[\Lambda, \Lambda]=0$.

Une *super-variété symplectique* est une super-variété munie d'une 2-forme ω non-dégénérée et fermée. La donnée d'un 2-tenseur pair dont le crochet de Schouten avec lui-même est nul donne à cette super-variété une structure de *super-algèbre de Poisson* [4].

4. Produit de Moyal formel d'une super-variété plate

Soit (M, Λ) une super-variété de Poisson; Λ est un 2-tenseur pair dont le crochet de Schouten avec lui-même est nul; soit $\{\cdot,\cdot\}$ le crochet de Poisson qui s'en déduit. Définir un star-produit sur cette super-variété conduit à déformer formellement l'algèbre $\mathscr{A}(M)=N$. Etant donné un nombre complexe ν $(=i\hbar/2)$, un star-produit est une loi de composition dans l'espace $E(N, \nu)$ des séries formelles en ν, dont les coefficients sont des fonctions de N [9]; il doit vérifier les relations
$\forall u, v, w \in E(N, \nu)$:

(a)
$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u, v) \; ; \tag{6}$$

pour $r \geqslant 1$, les $C_r(u, v)$ sont des opérateurs bi-différentiels nuls sur les constantes,

(b)
$$C_0(u, v) = uv \, ,$$

(c)
$$C_1(u, v) - C_1(v, u) = 2\nu\{u, v\} \; ;$$

(d) pour tout $t \geqslant 1$,

$$\sum_{r+s=t} C_r(C_s(u, v), w) = \sum_{r+s=t} C_r(u, C_s(v, w)) \, .$$

La relation (d) traduit l'associativité du star-produit; la relation (c) montre que le crochet

$$[u, v] = \frac{1}{2\nu}\,(u *_\nu v - v *_\nu u) \tag{7}$$

est une déformation du crochet de Poisson.

Supposons que la variété M soit plate: $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $(p=2n)$. Il est connu [1,8] que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées lorsque les opérateurs bi-différentiels C_r sont définis par les relations ci-dessous; ce choix sera fait dans la suite:

$$C_r(u, v) = \frac{1}{r!} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \dots \Lambda^{i_r j_r} (-1)^{a_{ij}} \partial_{i_1 i_2 \cdots i_r} u \, \partial_{j_1 j_2 \cdots j_r} v \, ,$$

$$a_{ij} = |u| \sum_{k=1}^{r} |x^{j_k}| + \sum_{k=1}^{r} \left(|x^{j_k}| \sum_{s=1}^{k-1} |x^{i_s}| \right) .$$

Le star-produit de deux éléments impairs ξ^i et ξ^j est donné par la relation

$$\begin{aligned} \xi^i *_\nu \xi^j &= \xi^i \xi^j - \nu \Lambda^{p+i\, p+j} \, , \quad && \text{si } i \neq j \, , \\ &= -\nu \Lambda^{p+i\, p+i} \, , && \text{si } i = j \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Considérons, pour un vecteur v de V de coordonnées v_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, l'expression $Q(v) = v *_\nu v$. L'anticommutativité des variables impaires ξ^i donne

$$Q\left(\sum_{i=1}^{q} v_1 \xi^i\right) = -\nu \sum_{i,j=1}^{q} v_i v_j \Lambda^{p+i\,p+j} .$$

Puisque le 2-tenseur Λ est super-antisymétrique, il y a égalité entre les coordonnées $\Lambda^{p+i\,p+j}$ et $\Lambda^{p+j\,p+i}$. L'application $Q: v \mapsto v *_\nu v$ est donc une forme quadratique. Désignons par $C(V)$ l'algèbre de Clifford définie par l'espace vectoriel V (de base $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^q$) et la forme quadratique Q; $C(V)$ est un espace vectoriel de dimension 2^q.

L'algèbre $(E(N, \lambda), *_\nu)$ est la star-algèbre des séries formelles en ν dont l'ensemble des coefficients est isomorphe à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \otimes C(V)$.

5. Super-variété $\mathbb{R}_S^{2n}$; super-star-ν-algèbres

Nous allons considérer la super-variété symplectique $\mathbb{R}^{2n|3}$ définie par la variété $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, un espace vectoriel V de dimension 3 et la 2-forme ω définie par la relation (4) avec des $\epsilon(i)$ égaux à 1. Les seules coordonnées différentes de 0 du deux-tenseur Λ associé sont

$$\Lambda^{i,i+n} = -\Lambda^{i+n,i} = 1 , \quad 1 \leqslant i \leqslant n ; \qquad \Lambda^{2n+j,2n+j} = 1 , \quad 1 \leqslant j \leqslant q .$$

Considérons les éléments pairs: S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, définis par la relation $S^i = \xi^j *_\nu \xi^k$ où la suite i, j, k est une permutation paire des entiers 1, 2, 3 [cet énoncé sera noté (i, j, k)]. Les éléments S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, vérifient les relations

$$S^i *_\nu S^j = \sigma_{i,j,k}\, \nu\, S^k , \quad \sigma_{i,j,k} \text{ la signature de la permutation } i, j, k ,$$

$$S^i *_\nu S^i = -\nu^2 = \hbar^2/4 , \qquad [S^i, S^j] = S^k , \quad (i, j, k) . \tag{9}$$

Remarquons que l'espace vectoriel réel engendré par les S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, est une algèbre de Lie pour la loi de composition définie par le crochet [,] isomorphe à l'algèbre des vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3 dont la loi de composition est le produit vectoriel. Les trois quantités S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, vérifient les mêmes relations de commutation que les observables de spin considérées habituellement, S_x, S_y et S_z [10]. Désignons par V_S l'espace vectoriel complexe engendré par les S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$. L'application $Q: v \mapsto v *_\nu v$ est une forme quadratique; l'algèbre de Clifford engendrée par l'espace vectoriel V_S et la forme quadratique Q est une star-algèbre de dimension 4.

L'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^{2n}$ étant désigné par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, soit $\mathscr{S}'_S$ l'espace vectoriel $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \otimes C(V_S)$; cet espace vectoriel est isormorphe au produit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})^4$; il est muni naturellement d'une topologie produit. Ses éléments f sont définis par un quadruplet $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ de distributions tempérées; ils s'écrivent

$$f=f_0+\sum_{i=1}^{3} S^i f_i\,. \tag{10}$$

Appelons *super-variété* $\mathbb{R}_S^{2n}$ le couple de la variété $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$ et de l'espace $\mathcal{S}'_S$. D'une manière générale considérons une star-ν-algèbre $\mathcal{A}$ de distributions tempérées par exemple $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, ...; c'est un espace vectoriel topologique dans lequel le produit de Moyal est continu (de $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$). Désignons par $\mathcal{A}_S$ l'espace vectoriel $\mathcal{A}\otimes C(V_S)$. Cet ensemble est isomorphe au produit $\mathcal{A}^4$ et est une algèbre; comme le star-produit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ et d'une variable impaire ξ^i est égal au produit ordinaire, le star-produit de deux éléments u et v est donné par la relation

$$u*_\nu v=u_0*_\nu v_0+\frac{\hbar^2}{4}\sum_{i=1}^{3} u_i*_\nu v_i$$
$$+\sum_{i=1}^{3} S^i(u_0*_\nu v_i+u_i*_\nu v_0)+\nu \underset{i,j,k}{\mathsf{S}}\, S^i(u_j*_\nu v_k-u_k*_\nu v_j)\,. \tag{11}$$

Cette algèbre $(\mathcal{A}_S, *_\nu)$ est associative à cause du choix effectué lors de la définition du produit des éléments impairs. Puisque $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel topologique, $\mathcal{A}_S$ sera muni de la topologie produit; ainsi le produit de Moyal est continu de $\mathcal{A}_S\times\mathcal{A}_S$ dans $\mathcal{A}_S$.

6. Les algèbres $(\mathcal{S}_S, *_\nu)$ et $(\mathcal{H}_S, *_\nu)$

L'existence des algèbres $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), *_\nu)$ et $(L^2(\mathbb{R}^{2n}), *_\nu)$ a été démontrée à l'aide du produit de convolution déformé ou de la loi de composition des noyaux d'opérateurs intégrales [11]. Le produit de Moyal obtenu recouvre bien la définition formelle du star-produit car pour des fonctions u et v convenables la fonction $v\mapsto u*_\nu v$ admet un dévelopement limité qui coïncide avec les premiers termes de la série formelle (6) et pour deux fonctions u et v de $\mathcal{S}$, la fonction $u*_\nu v$ converge vers uv lorsque ν tend vers 0 dans $\mathcal{S}$.

Désignons par $\mathcal{S}_S$ et $\mathcal{H}_S$ les algèbres $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})\otimes C(V_S)$ et $L^2(\mathbb{R}^{2n})\otimes C(V_S)$; le produit de deux éléments des ces algèbres est donné par la relation (11). Ces algèbres sont non-dégénérées (i.e., le produit $\bar{h}*_\nu h$ est nul si et seulement si h est nul). Le choix des topologies de ces ensembles et les propriétés des algèbres $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ donnent le résultat:

Théorème.

(i) Le dual topologique de $\mathcal{S}_S$ est (isomorphe à) l'espace $\mathcal{S}'_S$. Cette dualité s'exprime par la relation

$$\forall f \in \mathscr{S}'_S, \forall \varphi \in \mathscr{S}_S, \quad \langle f, \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi_0 \rangle + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^{3} \langle f_i, \varphi_i \rangle . \tag{12}$$

(ii) L'espace $\mathscr{H}_S$ est un espace de Hilbert. Le produit scalaire de deux éléments h et k s'exprime par la relation

$$\forall h, k \in \mathscr{H}_S, \quad (h|k) = (h_0|k_0) + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^{3} (h_i|k_i) . \tag{13}$$

La continuité du produit de Moyal dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ s'exprime à l'aide de l'inégalité

$$\forall h, k \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \quad \|h *_\nu k\| \leqslant \beta_n \|h\| \, \|k\| , \quad \beta_n = (2\pi\hbar)^{-n/2} .$$

Cette inégalité conduit à poser:

$$\forall u, v \in \mathscr{H}_S, \quad \|u\|^\nu = \beta_n \|u\| ,$$

$$\forall f \in \mathscr{S}'_S, \forall \varphi \in \mathscr{S}_S, \quad \langle f, \varphi \rangle^\nu = (\beta_n)^2 \langle f, \varphi \rangle . \tag{14}$$

La continuité du produit de Moyal s'écrit dans $\mathscr{H}_S$: $\|h *_\nu k\|^\nu \leqslant 4 \|h\|^\nu \|k\|^\nu$. Le coefficient $(\beta_n)^2$ a déjà été introduit pour définir les états [12]: un *état* est une fonction ρ définie dans $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant les relations

$$\rho *_\nu \rho = \frac{1}{N} \rho , \quad (\beta_n)^2 \int_{\mathbb{R}^{2n}} \rho(x) \, \mathrm{d}x = 1 , \tag{15}$$

où N est la multiplicité.

7. L'algèbre $(\mathscr{O}^\nu_{M,S}, *_\nu)$

Il est facile d'établir pour trois fonctions φ, ψ et ρ quelconques de $\mathscr{S}_S$ la relation

$$\langle \varphi *_\nu \psi, \rho \rangle = \langle \varphi, \psi *_\nu \rho \rangle . \tag{16}$$

Cette relation et la continuité dans $\mathscr{S}_S$ du produit de Moyal permettent de définir ce produit pour une distribution tempérée f de $\mathscr{S}'_S$ et une fonction φ de $\mathscr{S}_S$ par la relation

$$\forall \psi \in \mathscr{S}_S, \quad \langle f *_\nu \varphi, \psi \rangle = \langle f, \varphi *_\nu \psi \rangle . \tag{17}$$

L'application bilinéaire $(f, \varphi) \mapsto f *_\nu \varphi$ est séparément continue de $\mathscr{S}'_S$ ou de $\mathscr{S}_S$ dans $\mathscr{S}'_S$. Pour qu'une distribution f soit nulle, il faut et il suffit que son produit avec toute fonction φ de $\mathscr{S}_S$ le soit.

Définition. L'espace $\mathscr{O}^\nu_{M,S}$ est l'espace vectoriel des distributions f de $\mathscr{S}'_S$ telles que l'application $\varphi \mapsto f *_\nu \varphi$ soit continue de $\mathscr{S}_S$ dans lui-même. C'est l'espace des multiplieurs continus à gauche dans $\mathscr{S}_S$.

D'après la relation (11) l'espace vectoriel $\mathscr{O}^{\nu}_{M,S}$ est égal à l'espace vectoriel $\mathscr{O}^{\nu}_M \otimes \mathrm{C}(V_S)$. $\mathscr{O}^{\nu}_M$ désigne l'algèbre des distributions tempérées définies sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que l'application $\varphi \mapsto f *_\nu \varphi$ est continue de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ dans lui-même [11,13]. Par suite l'ensemble $\mathscr{O}^{\nu}_{M,S}$ est une algèbre. L'espace $\mathscr{S}'_S$ est un module à droite sur $\mathscr{O}^{\nu}_{M,S}$.

Il est important de savoir que dans l'espace $\mathscr{O}^{\nu}_M$ se trouve bien sûr l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mais aussi l'espace des distributions à support compact $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^{2n})$ et l'espace $\mathscr{F}(\mathscr{E}'(\mathbb{R}^{2n}))$ des fonctions indéfiniment dérivables dont la transformée de Fourier est une distribution à support compact. Par exemple,

$$x \mapsto \exp(-ax^2), a>0 \; ; \quad \delta \; ; \quad 1 \; ;$$
$$x \mapsto x^i x^{j+n} - x^j x^{i+n} \; ; \quad x \mapsto \exp(\mathrm{i}ax^2) \; , \quad a \in \mathbb{R} \; .$$

8. L'algèbre $(\mathscr{B}^{\nu}_S, *_\nu)$

Définition. Soit $\mathscr{B}^{\nu}_S$ l'ensemble des distributions f de $\mathscr{S}'_S$ telles que l'opérateur O_f de $\mathscr{H}_S$ défini dans $\mathscr{S}_S$ par la relation, $\varphi \mapsto f *_\nu \varphi$, soit continu.

Munissons cet espace vectoriel de la norme de l'opérateur linéaire borné O_f:

$$\|f\|^{\nu}_{\epsilon} = \sup\{\|f *_\nu \varphi\| / \|\varphi\| \; ; \varphi \in \mathscr{S}_S\} \; . \tag{18}$$

Comme précédemment cet espace est égal à l'espace vectoriel $\mathscr{B}^{\nu} \otimes \mathrm{C}(V_S)$, où $\mathscr{B}^{\nu}$ désigne l'ensemble des distributions tempérées définies sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que l'opérateur $\varphi \mapsto f *_\nu \varphi$ est continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ pour la norme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ [11]. Le couple $(\mathscr{B}^{\nu}_S, *_\nu)$ est comme $(\mathscr{B}^{\nu}, *_\nu)$, une C*-algèbre. Puisque $\mathscr{B}^{\nu}_S$ est aussi isomorphe à $(\mathscr{B}^{\nu})^4$, la norme définie par la relation (18) est équivalente à une norme de l'espace produit; il vient

$$\|f\|^{\nu}_{\epsilon} \leqslant \|f_0\|^{\nu}_{\epsilon} + \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^{3} \|f_i\|^{\nu}_{\epsilon} \leqslant 4 \|f\|^{\nu}_{\epsilon} \; . \tag{19}$$

Un exemple: l'élément $1 + bS^1$, $b \in \mathbb{C}$, a une norme égale à $(1 + \hbar^2 |b|^2/4 + \hbar |\mathrm{Re}\, b|)^{1/2}$.

Une deuxième propriété caractéristique de cet espace est le résultat:

Théorème. *L'algèbre* $(\mathscr{B}^{\nu}_S, *_\nu)$ *est isomorphe à la sous-algèbre des opérateurs* G *continus de* $\mathscr{H}_S$ *qui possèdent la propriété*

$$\forall h, k \in \mathscr{H}_S \, , \quad G(h *_\nu k) = G(h) *_\nu k \; . \tag{20}$$

En effet, si l'élément g appartient à $\mathscr{B}_S^\nu$, l'opérateur O_g étant borné, se prolonge par continuité à $\mathscr{H}_S$ et vérifie la relation (20). Réciproquement, soit G un opérateur possédant la propriété définie par la relation (20). Pour tout élément h de $\mathscr{H}_S$, l'élément $G(h)$ s'écrit

$$G(h)=g_0(h)+\sum_{i=1}^{3} S^i g_i(h) .$$

Les quatre applications $h\mapsto g_i(h)$, $0\leqslant i\leqslant 3$, sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ possédant la même propriété. Ils sont par suite définis par des éléments de $\mathscr{B}^\nu$ [11]. Il reste à déterminer l'élément g de $\mathscr{B}_S^\nu$ tel que

$$G(h)=g *_\nu h .$$

Ce résultat sera utile, dans la suite, pour déterminer la plus grande projection associée à une valeur propre; rappelons la définition:

Définition. Une projection est un élément π de $\mathscr{B}_S^\nu$ tel que $\pi *_\nu \pi=\pi$.

9. Valeurs propres, éléments propres, projections

Considérons le sous-espace $\mathscr{O}^\nu$ de $\mathscr{O}_{M,S}^\nu$ ensemble des multiplieurs continus à gauche et à droite. L'espace $\mathscr{S}'_S$ est un module bilatère sur $\mathscr{O}^\nu$.

Définition. Soit f un élément de l'espace $\mathscr{O}^\nu$ ou de $\mathscr{B}_S^\nu$; le nombre complexe a est une valeur propre de f s'il existe un élément g $(\neq 0)$ appelé élément propre de f associé à a, appartenant à $\mathscr{B}_S^\nu$ tel que

$$f *_\nu g=g *_\nu f=ag . \tag{21}$$

Soit O_f l'opérateur de $\mathscr{H}_S$ défini par la relation $h\mapsto f *_\nu h$; son ensemble de définition D_f est l'ensemble des éléments h de $\mathscr{H}_S$ tels que $f *_\nu h$ appartienne à $\mathscr{H}_S$. O_f est fermé; son adjoint est l'opérateur $O_{\bar{f}}$ défini dans les mêmes conditions. Il est alors facile de prouver qu'une valeur propre de f est aussi valeur propre de l'opérateur O_f et que l'opérateur projection sur le sous-espace propre vérifie la relation (20). Par suite:

Théorème. *A toute valeur propre a d'un élément f normal ($f *_\nu \bar{f}=\bar{f} *_\nu f$) appartenant à $\mathscr{O}^\nu$ ou à $\mathscr{B}_S^\nu$, est associé un élément propre π, qui est une projection et possède la propriété que tout élément propre g de f associé à a est stable par l'opérateur O_π:*

$$f *_\nu g=g *_\nu f=ag \quad \Rightarrow \quad \pi *_\nu g=g . \tag{22}$$

Appelons cet élément π *plus grande projection propre* associée à a. Des exemples sont donnés au paragraphe 12.

10. Familles spectrales

Avant de définir les familles spectrales, il y a lieu de caractériser la convergence *faible dans l'espace $\mathscr{B}_S^\nu$. Cette convergence provient du fait que l'espace $\mathscr{B}^\nu$ est isomorphe à l'espace des opérateurs linéaires continus de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, qui est le dual de l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)\,\hat{\otimes}_\pi L^2(\mathbb{R}^n)$, isomorphe à l'espace des opérateurs nucléaires [11]. Par suite, l'espace $\mathscr{B}_S^\nu$ est le dual d'un espace vectoriel normé Π_S^ν qui est engendré par $\mathscr{H}_S *_\nu \mathscr{H}_S$ et est muni d'une norme $\|\cdot\|_\pi^\nu$ qui a, entre autres, la propriété

$$\forall h, k \in \mathscr{H}_S, \quad \|h *_\nu k\|_\pi^\nu \leqslant \|h\|^\nu \|k\|^\nu . \tag{23}$$

*Une suite d'éléments $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est *faiblement convergente dans $\mathscr{B}_S^\nu$ si et seulement si $\forall h, k \in \mathscr{H}_S$, la suite $\langle f_p, h *_\nu k\rangle$, $p \geqslant 0$, est une suite complexe convergente.*

Il est alors aisé de définir une famille spectrale en se référant à la définition habituelle dans les espaces de Hilbert [14]:

Définition *(Famille spectrale ou résolution de l'unité).* Soit $t \mapsto e(t)$ une application définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{B}_S^\nu$; supposons que pour tout réel t, $e(t)$ soit une projection. Cette famille de projections est appelée *famille spectrale* si elle possède les propriétés suivantes:

(i) $\forall t, t', t \leqslant t' \Rightarrow e(t) *_\nu e(t') = e(t)$,

(ii) $\forall t$, $e(t+0) = e(t)$ dans $\mathscr{B}_S^\nu$ *faible ,

(iii) $\lim_{t\to-\infty} e(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} e(t) = 1$, dans $\mathscr{B}_S^\nu$ *faible .

Exemple. *(Système total de projections).* Soit $(\pi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille de projections telle que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \neq q \quad \Rightarrow \quad \pi_p *_\nu \pi_q = 0 \ , \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_p = 1 \ ,$$

dans $\mathscr{B}_S^\nu$ *faible. L'application $t \mapsto \sum_{p\leqslant t} \pi_p$ est une famille spectrale.

11. Décomposition spectrale

Les théorèmes sur la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens permettent d'énoncer le résultat [14]:

Théorème. *Soit f un élément réel de $\mathscr{B}_S^\nu$ ou de $\mathscr{O}_{M,S}^\nu$; il existe une unique famille spectrale $t \mapsto e(t)$ telle que*

$$\forall h \in D_f, k \in \mathcal{H}_S\,, \quad \langle f *_\nu h, k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \,\mathrm{d}\langle e(t), h *_\nu k\rangle\ . \tag{24}$$

Tout élément g de $\mathcal{B}_S^\nu$ qui commute avec f commute avec chaque projection $e(t)$ et en particulier avec la plus grande projection associée à une valeur propre a de f.

Le spectre $\sigma(f)$ est l'ensemble des réels en lesquels la famille est strictement croissante. Dans le spectre de f se trouvent les valeurs propres de f; pour que le réel a soit valeur propre il faut et il suffit que la famille spectrale soit discontinue en a; le saut de la famille spectrale en a est égal à la plus grande projection propre associée à a. Les autres réels sont les points du spectre continu. Le complémentaire du spectre est l'ensemble résolvant $\rho(f)$, c'est l'ensemble des réels a pour lesquels existe un élément $R(f;a)$ de $\mathcal{B}_S^\nu$ qui est l'inverse de $f-a$:

$$R(f;a) *_\nu (f-a) = (f-a) *_\nu R(f;a) = 1\ . \tag{25}$$

Applications.

(i) *Fonction* $x \mapsto \exp^{*\nu}(\mathrm{i}xf)$. Soit φ une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$ continue et bornée; l'élément $\varphi(f)$ est défini par l'intégrale (24) dans laquelle t est remplacé par $\varphi(t)$; c'est un élément de $\mathcal{B}_S^\nu$ dont la norme est majorée par le maximum M_φ de la fonction $|\varphi|$; il commute avec f. Au produit de deux fonctions φ et ψ correspond l'élément $\varphi(f) *_\nu \psi(f)$. En particulier, pour tout élément f réel de $\mathcal{B}_S^\nu$ ou de $\mathcal{O}_{M,S}^\nu$, l'application $x \mapsto \exp^{*\nu}(\mathrm{i}xf)$ est une fonction *faiblement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{B}_S^\nu$. La norme de $\exp^{*\nu}(\mathrm{i}xf)$ est égale à 1. Si f appartient à $\mathcal{B}_S^\nu$, cette fonction est *faiblement dérivable de dérivée $\mathrm{i}f *_\nu \exp^{*\nu}(\mathrm{i}xf)$; si f appartient à $\mathcal{O}_{M,S}^\nu$, la fonction $x \mapsto \exp^{*\nu}(\mathrm{i}xf) *_\nu h$ est dérivable pour tout h dans D_f.

(ii) *Spectre de certains éléments de* $\mathcal{O}_{M,S}^\nu$. Soit A un élément de l'algèbre $(\mathcal{O}_{M,S}^\nu, *_\nu)$; cette algèbre est un $\mathcal{O}_M^\nu$-module bilatère de dimension finie. Par suite pour tout élément A, il existe un entier r et des coefficients a_k et b_k pris dans $\mathcal{O}_M^\nu$ tels que la puissance $r$ième de A s'exprime à l'aide de puissances inférieures de A suivant la relation

$$A^{*\nu r} = \sum_{k=1}^{r-1} a_k *_\nu A^{*\nu k} *_\nu b_k + a_0\ . \tag{26}$$

Enonçons des corollaires sur le spectre de $f+A$ dans les deux cas suivants:

Lemme 1. *Soit A un élément réel de l'algèbre $\mathcal{B}_S^\nu$ défini par une combinaison linéaire des S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$; supposons que cet élément A annule un polynôme minimal P_A de degré r, à coefficients constants dont toutes les racines soient simples. Les valeurs propres de A sont les r racines du polynôme P_A et les plus grandes projec-*

tions propres associées à ces valeurs propres sont des polynômes $R_k(A)$ de degré $r-1$.

Chaque polynôme R_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, est proportionnel au quotient du polynôme P_A par $(X-x_k)$; la somme des polynômes R_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, est égale à 1. Ce lemme permet de caractériser le spectre d'un élément $f+A$ de l'espace $\mathcal{O}^{\nu}_{M,S}$ où f est un élément réel de $\mathcal{O}^{\nu}_M$ et A vérifie les hypothèses du lemme. La démonstration consiste à rechercher d'une part quels sont les points de l'ensemble résolvant et d'autre part ceux du spectre.

Corollaire 2. *Soit f un élément réel de $\mathcal{O}^{\nu}_M$ (c'est une fonction ou une distribution définie sur $\mathbb{R}^{2n}$) et A un élément satisfaisant les hypothèses du lemme 1 et commutant avec f. Le spectre de l'élément $f+A$ est égal à la réunion des r ensembles $\sigma(f)+\mu_k$. En particulier si le réel λ est une valeur propre de f, les r réels $\lambda+\mu_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont des valeurs propres de $f+A$. A la valeur propre $\lambda+\mu_k$ est associée la projection propre $\pi *_\nu R_k(A)$, produit des projections π et $R_k(A)$ respectivement éléments propres de f et de A associés à λ et μ_k.*

Lemme 3. *Soit A un élément de l'algèbre $(\mathcal{O}^{\nu}_{M,S}, *_\nu)$ qui vérifie la relation polynômiale $\mathcal{R}(A)=0$ où $\mathcal{R}(A)$ est la relation*

$$\mathcal{R}(A)=A^r+\sum_{k=1}^{r-1} A^k *_\nu b_k+b_0\,. \tag{27}$$

Les coefficients b_k, $0 \leqslant i \leqslant r-1$, sont des fonctions de $\mathcal{O}^{\nu}_M$; les fonctions b_k, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, commutent avec A.

Supposons qu'il existe une projection π élément propre commun aux fonctions b_k, associé aux valeurs propres β_k: $\forall k$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, $b_k *_\nu \pi=\pi *_\nu b_k=\beta_k \pi$. Soit P_π le polynôme complexe défini par la relation

$$P_\pi(X)=X^r+\sum_{k=1}^{r-1} X^k \beta_k+\beta_0\,. \tag{28}$$

Admettons que ce polynôme P_π ait des racines simples: α_k, $1 \leqslant k \leqslant r$. Soit $Q_k(X)$ le polynôme quotient de $P_\pi(X)$ par $(X-\alpha_k)$. Si l'élément $p_k=Q_k(A) *_\nu \pi *_\nu Q_k(A)$ n'est pas nul, la racine α_k est une valeur propre de l'élément A associée à l'élément propre p_k.

La démonstration consiste à remarquer:

$$\begin{aligned}(A-\alpha_k) *_\nu p_k &= (A-\alpha_k) *_\nu Q_k(A) *_\nu \pi *_\nu Q_k(A)\\ &=P_\pi(A) *_\nu \pi *_\nu Q_k(A)=\mathcal{R}(A) *_\nu \pi *_\nu Q_k(A)\,.\end{aligned}$$

Donc:

$$(A-\alpha_k) *_\nu p_k = 0 \, .$$

L'égalité symétrique utilise la commutativité de A avec les b_k, $1 \leqslant k \leqslant r-1$. Si A est réel, les éléments p_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, ont des produits nuls deux à deux et ne sont pas simultanément nuls.

Il est facile d'en déduire le résultat suivant:

Corollaire 4. *Soit A un élément de $\mathscr{O}^\nu_{M,S}$ qui annule une relation polynômiale $\mathscr{R}(A)$ définie par la relation (27) et vérifie les hypothèses du lemme 3. Soit f un élément réel de $\mathscr{O}^\nu_M$ qui commute avec A. Si f admet une valeur propre λ associée à une projection π qui vérifie les hypothèses du lemme 3, l'élément $f+A$ admet la valeur propre $\lambda+\alpha_k$ chaque fois que l'élément p_k n'est pas nul.*

12. Particule de spin 1/2

Pour représenter une particule de spin 1/2, faisons l'hypothèse suivante [2]: L'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ muni de sa structure symplectique naturelle est remplacé par l'espace $\mathbb{R}^{2n}_S$ défini au paragraphe 5; à l'hamiltonien H_0 défini sur l'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, substituons un hamiltonien H somme de l'hamiltonien H_0 et d'une fonction polynômiale des variables S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, dont les coefficients sont des fonctions définies dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Une observable est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathscr{B}^\nu_S$ ou dans $\mathscr{O}^\nu_{M,S}$ dont l'évolution est régie par l'équation différentielle

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)u(t) = [u(t), H] \, , \quad u(0) = u_0 \, , \tag{29}$$

u_0 est une fonction donnée; [,] est le crochet défini par la relation (7) [15,16].

Des conditions suffisantes sur H et u_0, énoncées au paragraphe 10, permettent de donner la solution des éqs. (29):

$$u(t) = \exp^{*_\nu}(-tH/2\nu) *_\nu u_0 *_\nu \exp^{*_\nu}(tH/2\nu) \, . \tag{30}$$

Pour tout réel t, l'exponentielle $\exp^{*_\nu}(tH/2\nu)$ est définie à l'aide de la décomposition spectrale de H: c'est un élément de $\mathscr{B}^\nu_S$ de norme égale à 1. Or les "*états*" ont été définis par les conditions (15). La valeur d'attente d'une observable $u(t)$ sur un état ρ vaut $\langle u(t), \rho \rangle^\nu$ [12]. Cette expression existe, par exemple lorsque l'observable et l'état appartiennent respectivement à $\mathscr{B}^\nu_S$ et à Π^ν_S à cause de la dualité entre ces espaces.

Ensuite, *les états propres* de la particule sont les éléments propres de l'hamiltonien et les *niveaux d'énergie* de ces états sont les valeurs propres associées.

13. Moment cinétique

Considérons d'abord une particule définie par les observables $(q^i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ et $(p^i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$. Posons $x^i=q^i$ et $x^{i+3}=p^i$ si $1\leqslant i\leqslant 3$. Désignons par $\boldsymbol{L}$ le moment cinétique orbital défini par les fonctions coordonnées: $L^i=x^jx^{k+3}-x^kx^{j+3}$, (i, j, k). Ces trois fonctions L^i, $1\leqslant i\leqslant 3$, appelées coordonnées, vérifient les relations

$$[L^i, L^j]=L^k\,, \quad (i,j,k)\,. \tag{31}$$

Désignons par $\boldsymbol{L}^2$ l'expression

$$\boldsymbol{L}^2=\sum_{i=1}^{3} L^i *_\nu L^i\,. \tag{32}$$

Les relations de commutation (31) impliquent les relations

$$\forall i\,, \quad [\boldsymbol{L}^2, L^i]=0\,. \tag{33}$$

Plus généralement un moment cinétique $\boldsymbol{J}$ est défini par des coordonnées J^i, $1\leqslant i\leqslant 3$, qui sont des éléments de l'espace $\mathscr{B}_S^\nu$ ou $\mathcal{O}_{M,S}^\nu$ et qui vérifient des équations analogues aux relations (31). Définissons $\boldsymbol{J}^2$ de manière analogue à l'aide de la relation (32). Les éléments $\boldsymbol{J}^2$ et J^i, $1\leqslant i\leqslant 3$, vérifient les relations (33) comme le moment cinétique orbital d'une particule. Puisque les deux éléments $\boldsymbol{J}^2$ et J^3 commutent, il est plausible qu'ils aient des éléments propres communs; le résultat ci-dessous précise les valeurs propres associées à un élément propre commun.

Théorème. *Soit $\boldsymbol{J}$ un moment cinétique vérifiant les relations (31); soit $\pi_{j,m}$ une projection, élément propre commun à $\boldsymbol{J}^2$ et à J^3. Ecrivons cette hypothèse sous la forme*

$$\begin{aligned}\pi_{j,m} *_\nu \boldsymbol{J}^2 &= \boldsymbol{J}^2 *_\nu \pi_{j,m} = j(j+1)\hbar^2\pi_{j,m}\,,\\ \pi_{j,m} *_\nu J^3 &= J^3 *_\nu \pi_{j,m} = m\hbar\pi_{j,m}\,.\end{aligned} \tag{34}$$

Les deux réels m et j vérifient les inégalités $-j\leqslant m\leqslant j$; les seules valeurs possibles pour j sont des demi-entiers; le réel m varie de $-j$ à j par addition de l'entier 1. *Les réels j et m sont dits nombres quantiques du moment cinétique* $\boldsymbol{J}$.

La démonstration apporte les précisions suivantes. Posons $J^+=J^1+\mathrm{i}J^2$ et $J^-=J^1-\mathrm{i}J^2$. Soit $\pi_{j,m}$ une projection $(\neq 0)$ vérifiant les relations (34) avec $-j+1\leqslant m\leqslant j$, la fonction $J^- *_\nu \pi_{j,m} *_\nu J^+$ est un élément propre $(\neq 0)$ commun à $\boldsymbol{J}^2$ et à J^3 associé aux valeurs propres définies par les valeurs j et $m-1$; de même pour $-j\leqslant m\leqslant j-1$, $J^+ *_\nu \pi_{j,m} *_\nu J^-$ est une projection associée à j et $m+1$. Il existe par suite des projections, différentes de 0, communes à $\boldsymbol{J}^2$ et à J^3 associées à des valeurs propres définies par j et k; le réel k ne peut varier qu'entre $-j$ et j car sinon l'élément propre considéré serait nul.

Exemples.

(i) *Spin 1/2.* Définissons le spin $\boldsymbol{S}$ par les coordonnées S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$; les relations (31) sont vérifiées. La relation (32) donne $\boldsymbol{S}^2$. Puisque $\boldsymbol{S}^2$ est égal à $3\hbar^2/4$, les relations (33) sont évidemment satisfaites. Les deux projections

$$\pi_\epsilon = \tfrac{1}{2} + (\epsilon/\hbar)S^3 , \quad \epsilon = \pm 1 , \tag{35}$$

sont des éléments propres de S^3 associés respectivement aux valeurs propres $\epsilon\hbar/2$ ($m=\epsilon/2$) et sont éléments propres de $\boldsymbol{S}^2$; la valeur propre associée est $3\hbar^2/4$; elle correspond à $j=\frac{1}{2}$.

Il est à remarquer que la plus grande projection propre associée à la valeur propre $3\hbar^2/4$ de $\boldsymbol{S}^2$ est la fonction 1. L'élément S^1 qui commute avec $\boldsymbol{S}^2$ commute bien avec 1, mais ne commute pas avec π_ϵ. La décomposition spectrale de S^3 est: $(\hbar/2)\pi_1 - (\hbar/2)\pi_{-1}$.

(ii) *Moment cinétique orbital.* Considérons la fonction $L^3 : x \mapsto L^3 = x^1x^5 - x^2x^4$. C'est une fonction réelle de l'espace $\mathcal{O}^\nu_M$. Elle admet la valeur propre 0; un élément propre associé est la projection

$$\pi(x) = 4 \exp\left(-\frac{1}{\hbar} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2] \right) .$$

Si $\boldsymbol{x}^2$ est la somme des carrés des x^i; la fonction $g_1 : x \mapsto \exp[-(1/\hbar)\boldsymbol{x}^2]$ est un élément propre commun à L^3 et à $\boldsymbol{L}^2$ associé à la valeur propre 0. Ces deux fonctions vérifient la relation $\pi *_\nu g_1 = g_1$. La fonction $u : x \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2$ commute avec L^3 sans commuter avec l'élément propre g_1. Un autre élément propre de L^3 est la fonction g_2:

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2 - (x^5)^2] \right) .$$

14. Composition de deux moments cinétiques

Considérons deux moments cinétiques $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$. Supposons que les coordonnées de l'un commutent avec les coordonnées de l'autre et il existe pour chaque moment cinétique un élément propre $\pi_{j,m}$ qui commute avec chaque coordonnée de l'autre. Posons

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{(1)} + \boldsymbol{J}_{(2)} , \quad \text{c'est à dire ,} \quad J^i = J^i_{(1)} + J^i_{(2)} . \tag{36}$$

Il est facile de vérifier que les J^i ainsi définis vérifient les relations de commutation (31). Par suite la quantité $\boldsymbol{J}^2$ définie à partir des J^i selon la relation (32), commute avec chaque J^i.

Le théorème du paragraphe 13 est applicable: les éléments propres communs à $\boldsymbol{J}^2$ et à J^3 sont associés à des valeurs propres définies par des nombres quantiques j et m; j et m sont des entiers ou des demi-entiers tels que $-j \leqslant m \leqslant j$ [10]. Déterminons ces nombres quantiques de $\boldsymbol{J}$ en fonction de ceux de $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$:

Soit un moment cinétique $\boldsymbol{J}$ somme de deux moments cinétiques $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$, vérifiant les hypothèses ci-dessus. Supposons que $j_{(1)}$, $m_{(1)}$ et $j_{(2)}$, $m_{(2)}$ soient des nombres quantiques de $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$. Les réels $(j_{(1)}+j_{(2)}, m_{(1)}+m_{(2)})$ sont des nombres quantiques du moment cinétique $\boldsymbol{J}$.

Par hypothèse: il existe des éléments propres ρ_{j_1,m_1} et σ_{j_2,m_2} communs à $\boldsymbol{J}^2_{(1)}$ et $J^3_{(1)}$ d'une part et à $\boldsymbol{J}^2_{(2)}$ et $J^3_{(2)}$ d'autre part; ils vérifient respectivement pour $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$ les éqs. (34) et les inégalités requises entre m et j. Il vient

$$\begin{aligned} J^3 *_\nu \rho_{j_1,m_1} *_\nu \sigma_{j_2,m_2} &= (J^3_{(1)} + J^3_{(2)}) *_\nu \rho_{j_1,m_1} *_\nu \sigma_{j_2,m_2} \\ &= (m_1 + m_2)\hbar \rho_{j_1,m_1} *_\nu \sigma_{j_2,m_2} \,. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'expression $\boldsymbol{J}^2$; elle s'écrit

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{J}^2_{(1)} + \boldsymbol{J}^2_{(2)} + 2J^3_{(1)} *_\nu J^3_{(2)} + J^+_{(1)} *_\nu J^-_{(2)} + J^-_{(1)} *_\nu J^+_{(2)} \,.$$

D'après le théorème du paragraphe 13, il existe des éléments propres ρ_{j_1,j_1} et σ_{j_2,j_2} ($\neq 0$) communs respectivement à $\boldsymbol{J}^2_{(1)}$ et $J^3_{(1)}$ d'une part et à $\boldsymbol{J}^2_{(2)}$ et $J^3_{(2)}$ d'autre part; or ces deux éléments propres ont leurs produits nuls respectivement avec $J^+_{(1)}$ et $J^+_{(2)}$. Par suite

$$\boldsymbol{J}^2 *_\nu \rho_{j_1,j_1} *_\nu \sigma_{j_2,j_2} = [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1 j_2]\hbar^2 \rho_{j_1,j_1} *_\nu \sigma_{j_2,j_2} \,.$$

Cette projection $\rho_{j_1,j_1} *_\nu \sigma_{j_2,j_2}$ est donc un élément propre de $\boldsymbol{J}^2$ et de J^3 associé respectivement aux valeurs propres $(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\hbar^2$ et $(j_1+j_2)\hbar$. D'après la démonstration du théorème fondamental, il est facile de déduire de cet élément propre des éléments propres associés aux nombres quantiques (j_1+j_2) et m compris entre $-(j_1+j_2)$ et (j_1+j_2) en considérant $J^- *_\nu \rho_{j_1,j_1} *_\nu \sigma_{j_2,j_2} *_\nu J^+$ puis de proche en proche des expressions analogues.

Exemple. Choisissons pour $\boldsymbol{J}_{(1)}$ et $\boldsymbol{J}_{(2)}$ le moment cinétique orbital $\boldsymbol{L}$ et le spin $\boldsymbol{S}$. Si l et m sont les nombres quantiques de $\boldsymbol{L}$, la somme $\boldsymbol{J}$ de $\boldsymbol{L}$ et de $\boldsymbol{S}$ a pour nombre quantique $l+\epsilon/2$ et $m+\epsilon/2$. La justification consiste à considérer l'expression $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{3} S^i L^i \,, \tag{37}$$

qui vérifie la relation

$$4\mathscr{L}^{*_\nu 2}+2\hbar^2\mathscr{L}-\hbar^2\boldsymbol{L}^2=0\ , \tag{38}$$

et à considérer un élément propre π commun à $\boldsymbol{L}^2$ et à L^3 pour construire un élément propre commun à J^3 et à $\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{L}^2+2\mathscr{L}+3\hbar^2/4$.

15. Particule de spin 1/2 dans un champ magnétique

Considérons une particule de spin $1/2$ d'espace de phase $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et d'hamiltonien H_0. Supposons qu'elle soit dans un état propre décrit par une projection π et un niveau d'énergie λ,

$$H_0 *_\nu \pi=\pi *_\nu H_0=\lambda\pi\ . \tag{39}$$

Supposons que cette particule de spin $1/2$ soit soumise à un champ magnétique constant; l'espace de phase est maintenant $\mathbb{R}_S^{2n}$ et l'hamiltonien H est égal à $H_0+\mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est défini par la relation [2,10]

$$\mathscr{C}=\sum_{1\leqslant i\leqslant 3} c^iS^i\ ,\quad c^i=2\mu_{\mathrm{B}}B^i/\hbar\ , \tag{40}$$

où μ_{B} est le magnéton de Bohr. La quantité $\mathscr{C}$ vérifie la relation $\mathscr{C}^{*_\nu 2}=\hbar^2\omega_{\mathrm{c}}^2/4$, où ω_{c} est la pulsation cyclotron. Les nouveaux états propres et les niveaux d'énergie sont les projections et valeurs propres de l'hamiltonien H. D'après le corollaire 2 du paragraphe 9, les projections propres sont $\pi *_\nu (\frac{1}{2}+\epsilon\mathscr{C}/\hbar\omega_{\mathrm{c}})$, et les valeurs propres $\lambda+\epsilon\hbar\omega_{\mathrm{c}}/2$. *Il y a donc dédoublement de l'état propre; deux niveaux d'énergie apparaissent.*

16. Particule de spin 1/2 dans un champ magnétique avec un couplage spin–orbite

Soit toujours une particule d'hamiltonien H_0 dans un état propre π et de niveau d'énergie λ (par exemple un électron atomique tournant autour de son noyau). Sous l'effet d'un champ électromagnétique son hamiltonien H est égal au précédent augmenté de $\mathscr{L}+\mathscr{C}$ [les quantités $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$ sont définies par les relations (37) et (40)],

$$H=H_0+\mathscr{L}+\mathscr{C}\ . \tag{41}$$

L'hamiltonien H_0 est supposé commuter avec $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$. Il est à remarquer que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$ ne commutent pas entre eux:

$$[\mathscr{L},\mathscr{C}]=\underset{i,j,k}{\mathsf{S}}\ S^i(L^jc^k-L^kc^j)\ . \tag{42}$$

Remarquons la propriété

$$[\mathscr{L}, \mathscr{C}]_+ = \tfrac{1}{2}(\mathscr{L} *_\nu \mathscr{C} + \mathscr{C} *_\nu \mathscr{L}) = \frac{\hbar^2}{4} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} L^i c^i . \tag{43}$$

La quantité $\mathscr{L} + \mathscr{C}$ vérifie la relation

$$4(\mathscr{L} + \mathscr{C})^{*_\nu 2} + 2\hbar^2(\mathscr{L} + \mathscr{C}) - \hbar^2 \boldsymbol{L}^2 - 8[\mathscr{L}, \mathscr{C}]_+ - \hbar^2 c^2 = 2\hbar^2 \mathscr{C} . \tag{44}$$

Par suite

$$\{4(\mathscr{L} + \mathscr{C})^{*_\nu 2} + 2\hbar^2(\mathscr{L} + \mathscr{C}) - \hbar^2 \boldsymbol{L}^2 - 8[\mathscr{L}, \mathscr{C}]_+ - \hbar^2 c^2\}^{*_\nu 2} = \hbar^6 c^2 . \tag{45}$$

Remarquons que la quantité $[\mathscr{L}, \mathscr{C}]_+$ est égale à c fois la composante du moment cinétique orbital dans la direction du vecteur champ magnétique B. Supposons par suite que la projection π soit un élément propre commun à l'hamiltonien H_0 avec la valeur propre λ, à $\boldsymbol{L}^2$ avec la valeur propre $\beta = l(l+1)\hbar^2$ et à $[\mathscr{L}, \mathscr{C}]_+$ avec la valeur propre $\gamma = mc\hbar^3/4$. La projection π commute sûrement avec $\mathscr{C}$, par suite elle commute avec le premier membre de (44). Multiplions les deux membres de la relation (45) par cette projection π; en utilisant la commutativité remarquée, nous en déduisons que les valeurs propres de $\mathscr{L} + \mathscr{C}$ sont racines du polynôme

$$\{(4X^2 + 2\hbar^2 X - l(l+1)\hbar^4 - 2m\hbar^3 c - \hbar^2 c^2\}^2 = \hbar^6 c^2 . \tag{46}$$

Ce polynôme admet quatre racines μ_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, facilement calculables, dont les valeurs approchées sont

$$\frac{\hbar c}{2} + m\frac{\hbar^2}{2} + \cdots, \frac{\hbar c}{2} + (m-1)\frac{\hbar^2}{2} + \cdots, -\frac{\hbar c}{2} - m\frac{\hbar^2}{2} + \cdots, -\frac{\hbar c}{2} - (m+1)\frac{\hbar^2}{2} + \cdots .$$

Les nouveaux niveaux d'énergie possibles sont donc $\lambda + \mu_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. *L'état propre initial se scinde en quatre nouveaux états auxquels correspondent quatre niveaux d'énergie.*

17. Système constitué de plusieurs particules de spin 1/2

Pour représenter un système constitué de s particules, effectuons les hypothèses suivantes:

Soit $2n$ le nombre d'observables classiques; considérons la super-variété $\mathbb{R}^{2n|3s}$ définie à l'aide de s triplets de variables impaires ξ^{3r+1}, ξ^{3r+2}, ξ^{3r+3}, $1 \leqslant r \leqslant s$. Elle est munie d'une structure symplectique définie par la 2-forme de la relation (4). Désignons par $S^i_{(r)}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant r \leqslant s$, les éléments pairs définis par la relation

$$S^i_{(r)} = \xi^{3r+j} *_\nu \xi^{3r+k} , \quad (i, j, k) . \tag{47}$$

Désignons par V_S le sous-espace vectoriel de V engendré par les $S^i_{(r)}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$,

$1 \leqslant r \leqslant s$; $(C(V_S), *_\nu)$ est une star-algèbre. Appelons comme au paragraphe 4 *super-variété* $\mathbb{R}^{2n}_S$ le couple de la variété $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et de l'algèbre $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \otimes C(V_S)$.

Pour une même valeur de r, ces éléments $S^i_{(r)}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, vérifient les relations (31). Définissons le spin $\boldsymbol{S}$ du système en posant

$$S^i = \sum_{r=1}^{s} S^i_{(r)} . \qquad (48)$$

Il est facile de vérifier que ces trois quantités S^i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, vérifient les relations (31). Par suite, elle commutent avec la quantité S^2 définie par la relation (32).

SYSTEME DE DEUX PARTICULES DE SPIN 1/2

Déterminons les valeurs propres et les projections propres des deux éléments S^3 et S^2. Ces expressions vérifient respectivement les polynômes minimaux:

$$(S^3)^{*_\nu 3} - \hbar^2 S^3 = 0 , \qquad (\boldsymbol{S}^2)^{*_\nu 2} - 2\hbar^2 \boldsymbol{S}^2 = 0 . \qquad (49)$$

Les polynômes vérifiés par les éléments S^3 et $\boldsymbol{S}^2$ permettent d'affirmer en utilisant les résultats du paragraphe 11:

- Les valeurs propres de S^2 sont associées aux nombres quantiques $j = 0, 1$; les projections propres sont

$$\rho_0 = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} \boldsymbol{S}^2 , \quad \rho_1 = \frac{1}{2\hbar^2} \boldsymbol{S}^2 .$$

- Les valeurs propres de S^3 sont associées aux nombres quantiques $m = -1, 0, 1$; les projections propres sont

$$\sigma_{-1} = \frac{1}{2\hbar^2} (-\hbar S^3 + (S^3)^{*_\nu 2}) , \qquad \sigma_0 = 1 - \frac{1}{\hbar^2} (S^3)^{*_\nu 2} ,$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\hbar^2} (\hbar S^3 + (S^3)^{*_\nu 2}) .$$

Les plus grandes projections propres $\rho_j *_\nu \sigma_m$ communes à $\boldsymbol{S}^2$ et à S^3 et les nombres quantiques associés sont donnés par la table 1.

La somme de toutes ces projections est égale à 1. La méthode utilisée pour

Table 1
Les plus grandes projections propres $\rho_j *_\nu \sigma_m$ communes à $\boldsymbol{S}^2$ et à S^3 et les nombres quantiques associés.

j	m	élément propre commun à $\boldsymbol{S}^2$ et à S^3
0	0	$\rho_0 *_\nu \sigma_0$
1	-1	$\rho_1 *_\nu \sigma_{-1}$
	0	$\rho_1 *_\nu \sigma_0$
	1	$\rho_1 *_\nu \sigma_1$

construire des éléments propres communs ne met pas en défaut le théorème général: les produits $\rho_0 *_\nu \sigma_1$ et $\rho_0 *_\nu \sigma_{-1}$ sont nuls.

INTERACTION DE DEUX PARTICULES DE SPIN 1/2

Supposons que le système de ces deux particules soit décrit, en l'absence de spin, par un hamiltonien H_0 et l'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Soit π un état propre de niveau d'énergie λ. Supposons que le couplage de ces particules de spin 1/2 augmente l'hamiltonien de la quantité $\gamma\sigma$ définie par la relation [10]

$$\sigma = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} S^i_{(1)} *_\nu S^i_{(2)} , \quad \gamma \text{ constante réelle} . \tag{50}$$

Il est facile de montrer que cette quantité σ vérifie l'équation

$$16\sigma^{*_\nu 2} + 8\hbar^2\sigma - 3\hbar^4 = 0 . \tag{51}$$

Les valeurs propres de σ sont les deux réels $\hbar^2/4$ et $-3\hbar^2/4$. D'après le corollaire 2 du paragraphe 11, le niveau d'énergie λ se subdivise en les deux niveaux $\lambda + \gamma\hbar^2/4$ et $\lambda - 3\gamma\hbar^2/4$; c'est le résultat classique.

Remerciements

Que M. Lichnerowicz veuille trouver ici nos remerciements chaleureux et notre gratitude pour les conversations enthousiastes et fructueuses que nous avons eues avec lui.

Bibliographie

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, Ann. Phys. 111 (1978) 61–110, 111–151.

[2] F.A. Berezin et M.S. Marinov, Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics, Ann. Phys. 104 (1977) 336–362.

[3] B. Kostant, Graded manifolds, graded Lie groups and prequantization, en: *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics,* Lecture Notes in Mathematics, No. 570 (Springer, Berlin, 1977) pp. 177–306.

[4] F. Cantrijn et L.A. Ibort, C.R. Acad. Sci. Paris 311, série II (1990) 567–572; Introduction to Poisson supermanifolds, Diff. Geom. Appl. 1 (1991) 133–152.

[5] D.A. Leites, Introduction to the theory of supermanifolds, Russ. Math. Surv. 35 (1980) 1–64.

[6] A. Jadczyk et D. Kastler, Graded Lie–Cartan pairs, the fermionic differential calculus, Ann. Phys. 179 (1987) 169–200.

[7] W. Greub, *Multilinear Algebra* (Springer, Berlin, 1978).

[8] J.-B. Kammerer et M. Valton, Produit de Moyal dans une super-variété plate; spin 1/2, C.R. Acad. Sci. Paris 315, série I (1992) 1319–1322.

[9] J. Dito, Star-product approach to quantum field theory: the free scalair field, Lett. Math. Phys. 20 (1990) 125–134; Star-products and non-standard quantization for the Klein–Gordon equation, J. Math. Phys. 33 (1992) 791–801.

[10] C. Cohen-Tannoudji, *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris).
[11] J.-B. Kammerer, Analysis of the Moyal product in a flat space, J. Math. Phys. 27 (1986) 529–535; Décomposition spectrale dans des algèbres munies d'un star-produit, Ann. Mate. Pura ed Appl. (IV) 142 (1985) 215–261.
[12] A. Lichnerowicz, *Deformations and quantization,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 775 (Springer, New York, 1979) p. 105.
[13] J.M. Maillard, Sur le produit de convolution gauche et la transformée de Weyl des distributions tempérées, C.R. Acad. Sci. Paris 298, série I (1984) 35–38; On the twisted convolution product and the Weyl transformation of tempered distributions, J. Geom. Phys. 3 (1986) 231–261.
[14] K. Yoshida, *Functional Analysis* (Springer, New York, 1974);
F. Riescz et Sc. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1968).
[15] F. Bayen et J.M. Maillard, Star exponentials of the elements of the inhomogeneous symplectic Lie algebra, Lett. Math. Phys. 6 (1982) 491.
[16] M.A. Antonets, The classical limit for Weyl quantization, Lett. Math. Phys. 2 (1978) 241–245; The algebra of Weyl symbols and the Cauchy problem for regular symbols, Math. Sbornik 35 (1979) 317–332.